

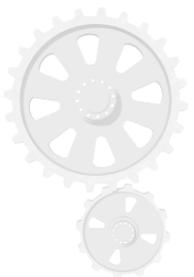


# Engrenagens cilíndricas de dentes retos

Alan Christie da Silva Dantas

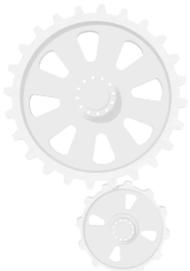
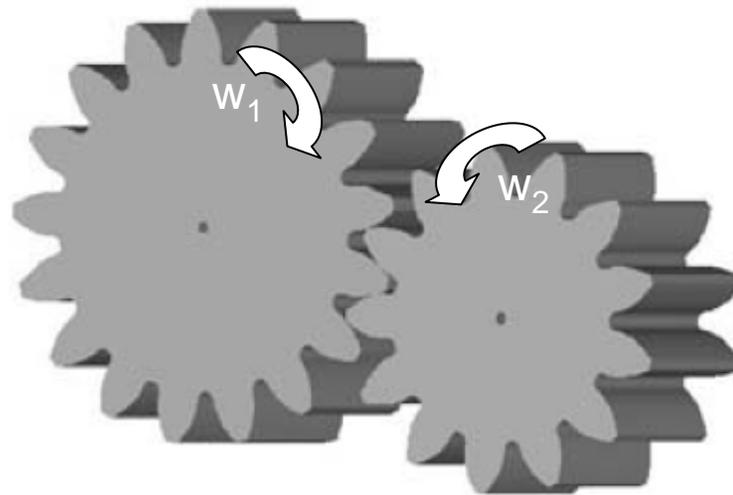
# Motivação

- Extensamente usadas para transmissão de movimento em máquinas industriais;
  - Rotativo – rotativo;
  - Rotativo – linear.
- Caixas de transmissão de tratores, caminhões e automóveis.
- Redutores em geral.

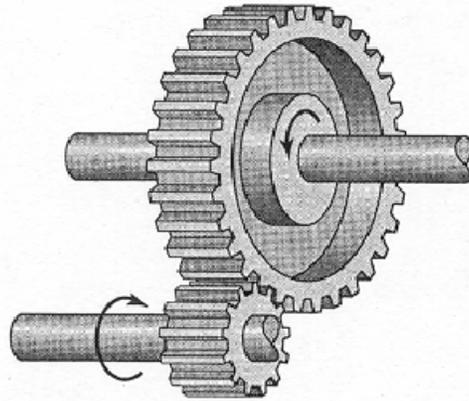


# Função principal

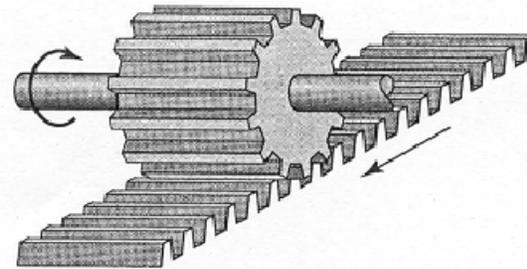
- Transmissão de movimento rotativo e Torque entre dois eixos.



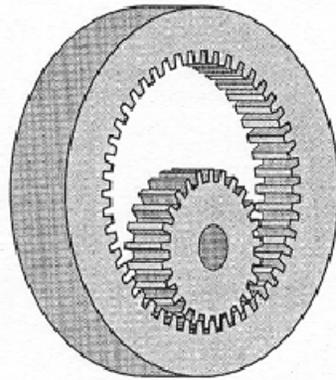
# Tipos de Engrenagens



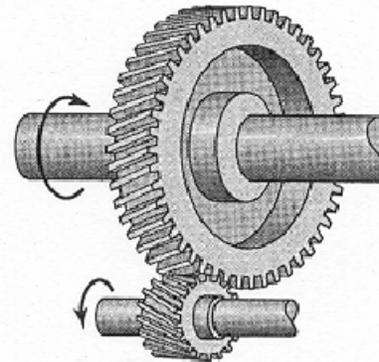
Eng. cilíndricas



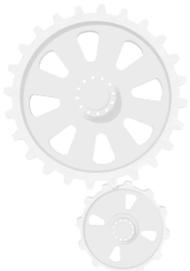
Pião - cremalheira



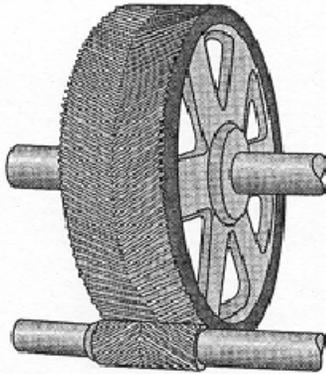
Engrenagem interna



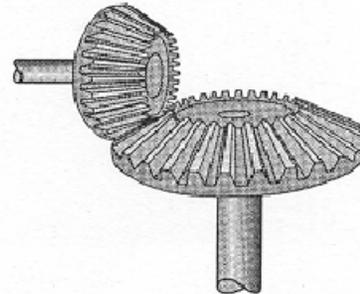
Engrenagem helicoidal



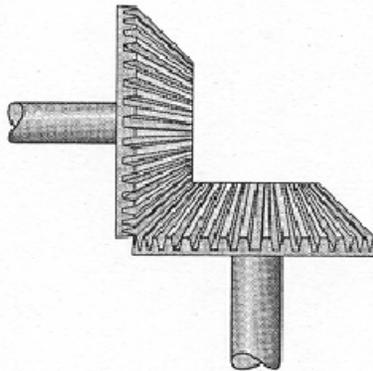
# Tipos de Engrenagens



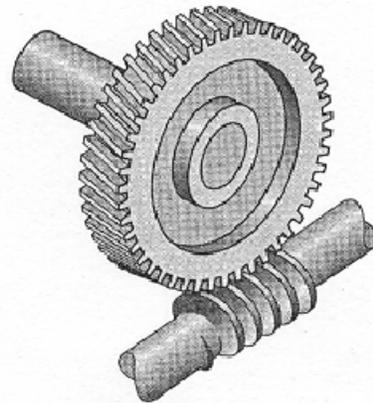
Eng. Espinha de peixe



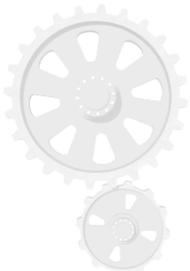
Eng. Cônicas



Eng. Cônicas

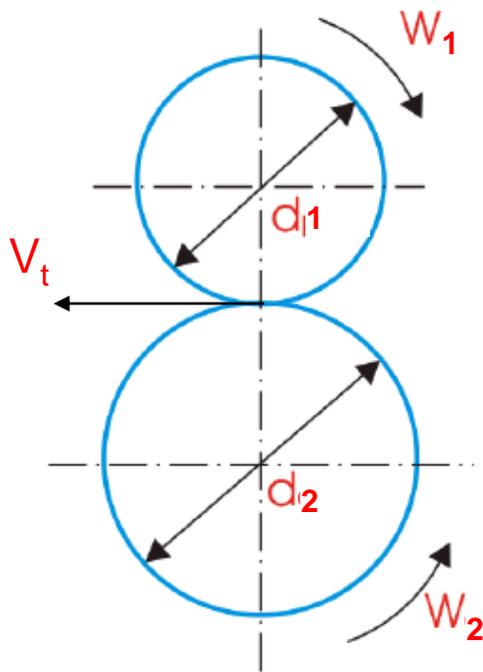


Parafuso sem-fim



# Considerando como rodas de fricção

Sendo 1 a roda motora (pinhão) e 2 a roda movida (coroa) temos:



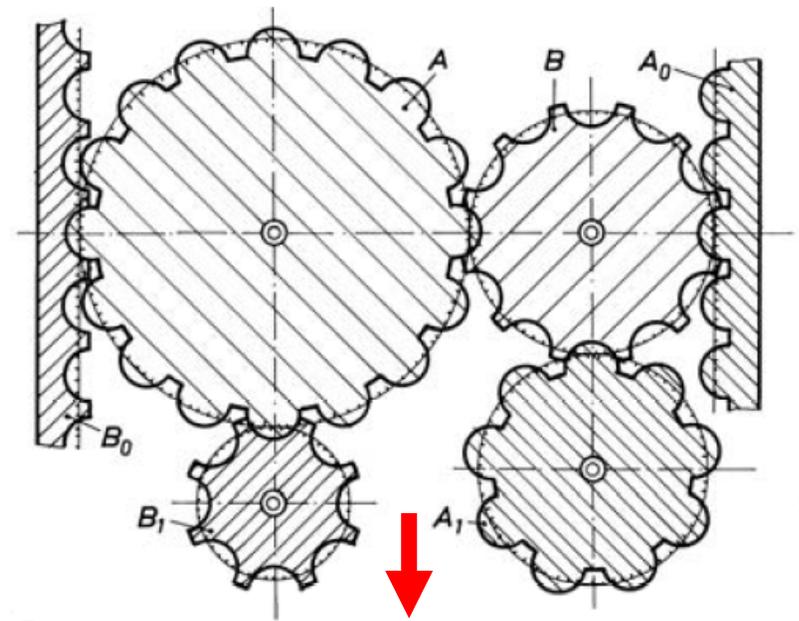
$$V_t = W_1 \cdot r_1 = W_2 r_2$$

$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{d_2}{d_1}$$



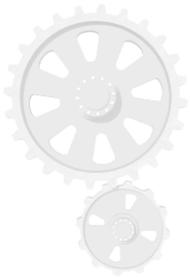
# Com o aumento do esforço a ser transmitido

- Rodas de fricção não são confiáveis;
  - Risco de escorregamento.
- Deve-se utilizar reentrâncias para garantir o contato e a transmissão de cargas.



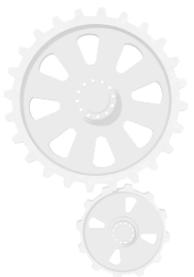
- Nenhum intercâmbio, B1 e B;
- Necessidade de construção vários Pares;



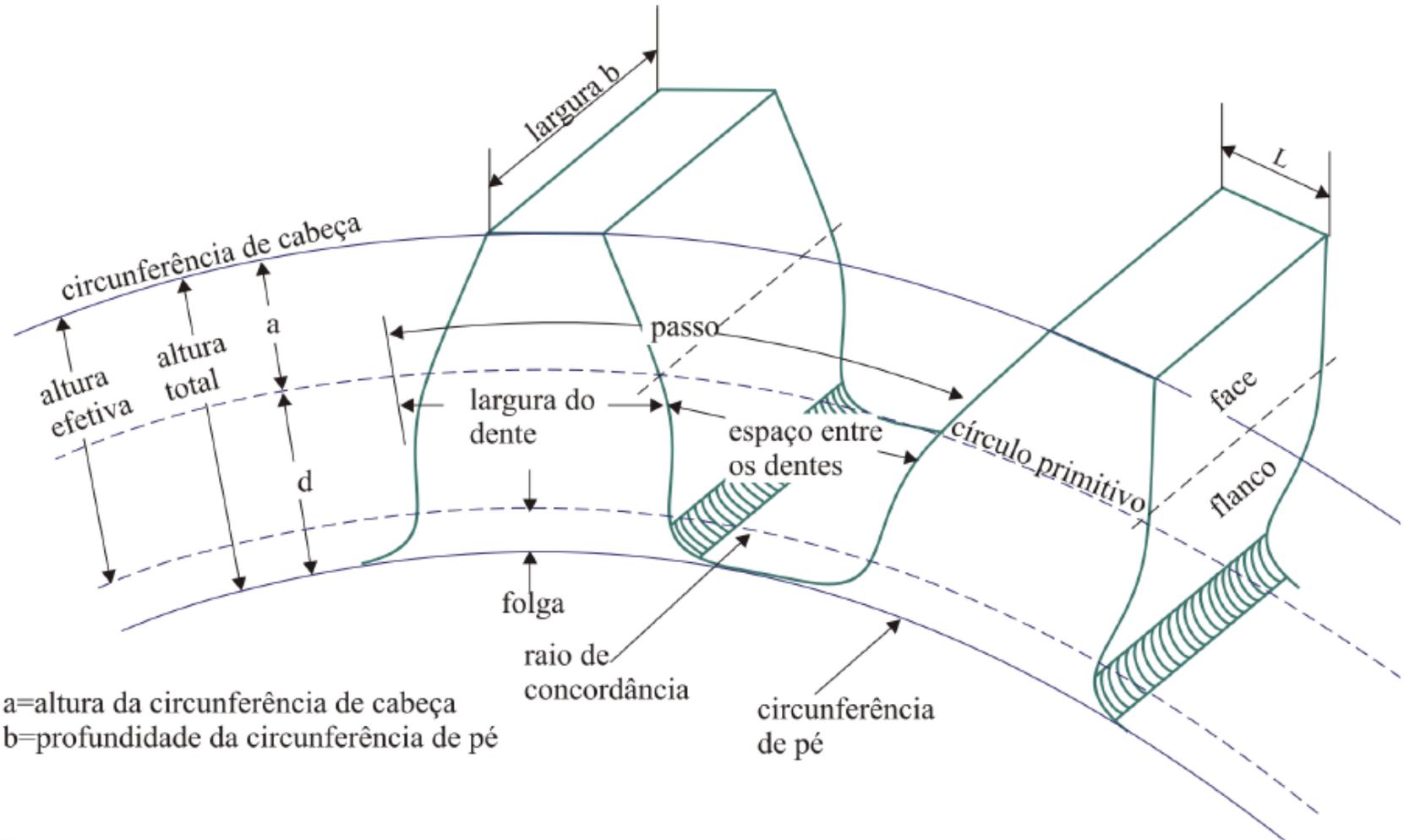


# Utilização de perfis padronizados

- Para aumentar a intercambiabilidade;
  - diminui o nr. de peças no estoque.
- Facilita na confecção devido ao uso de ferramentas padrão;



# Nomenclatura



a=altura da circunferência de cabeça  
 b=profundidade da circunferência de pé



# Nomenclatura

- Como elemento para determinar os parâmetros da engrenagem o passo traz o inconveniente de ser função de  $\pi$ .

Uso do módulo  $m$ ,



$$m = \frac{d}{z} = \frac{p}{\pi}$$

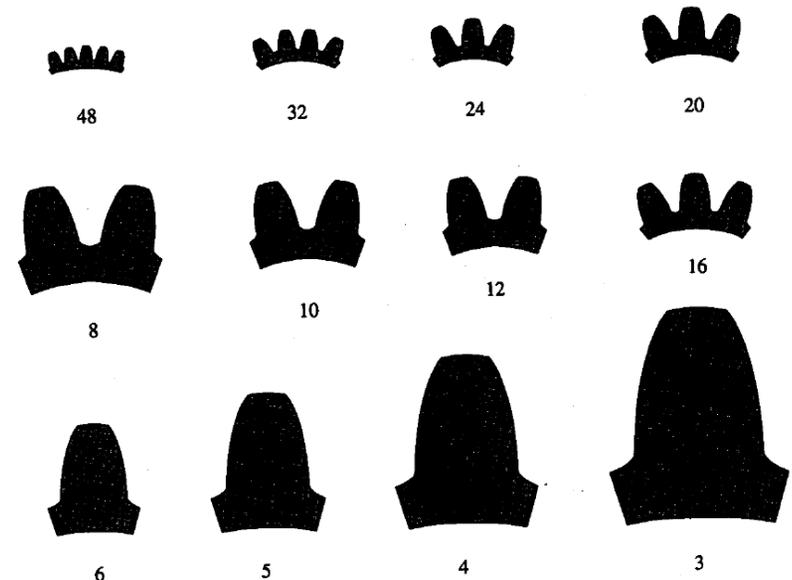


# Nomenclatura

- Como elemento para determinar os parametros da engrenagem o passo traz o inconveniente de ser função de  $\pi$ .

Países de língua inglesa usam o diametral pitch  $P$ ,

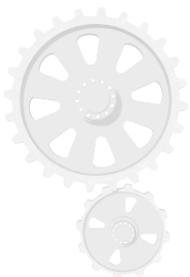
$$P = \frac{Z}{d} = \frac{\pi}{p}$$



# Lei das engrenagens

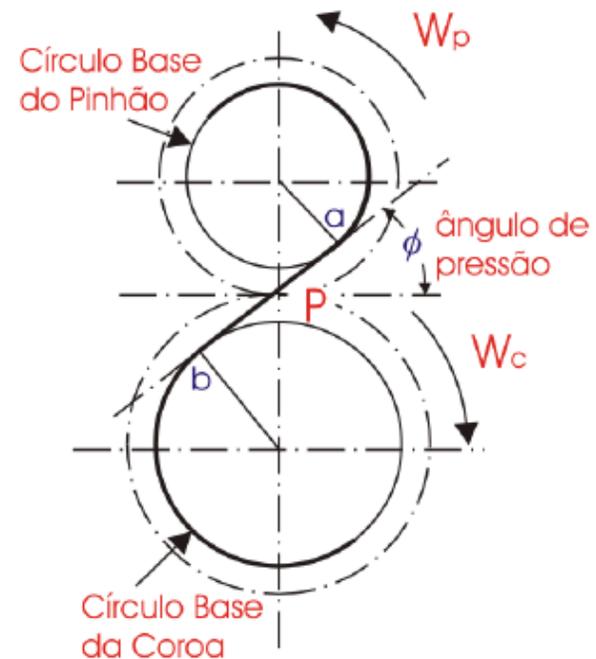
- 1° Ponto de contato – perfil da base da engrenagem motora toca o perfil da cabeça da engrenagem movida;
- Meio do contato – as engrenagens se cruzam no ponto de tangencia da das circunferências o chamado **Ponto primitivo**;
- Final do contato - o perfil da cabeça da engrenagem motora toca e se afasta do perfil da base da engrenagem movida.

***No ponto primitivo vale a regra da razão de transmissão***

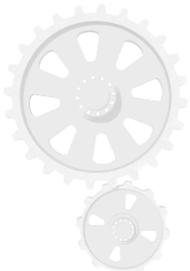
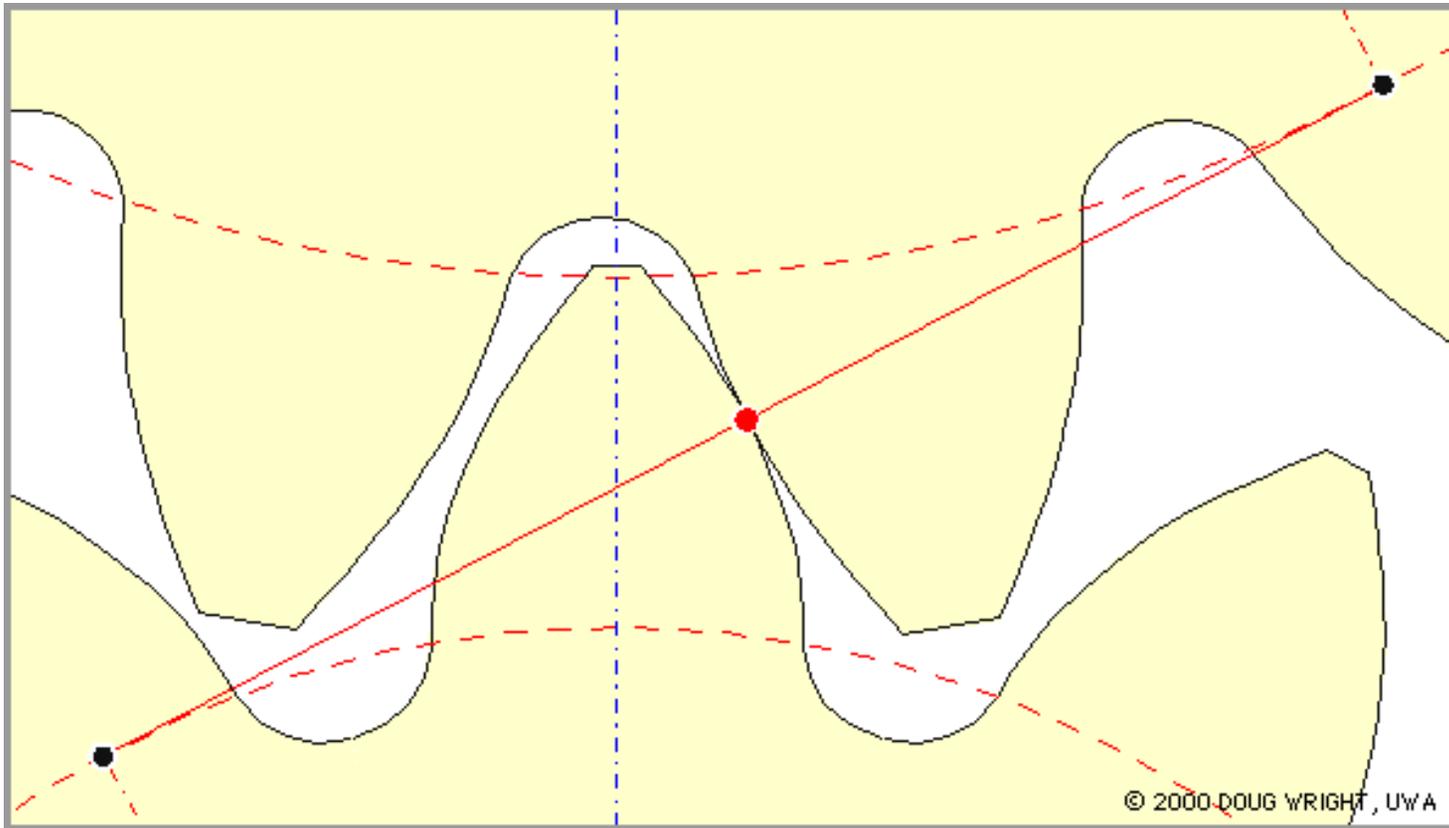


# Linha e ângulo de ação

- A linha de ação é descrita pela trajetória dos pontos de contato durante a transmissão de força de um par de engrenagens.
- O ângulo de ação ou de pressão é formado pela linha de ação e a tangente comum às duas circunferências.

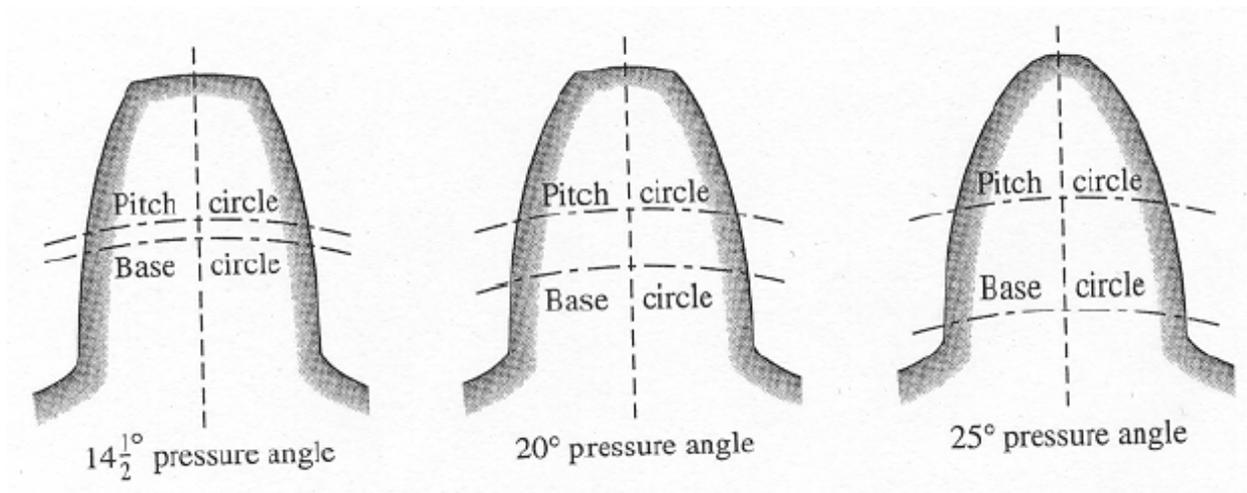


# Linha de ação



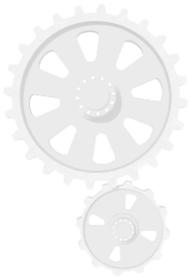
# A geometria dos dentes

- Efeito do ângulo de pressão



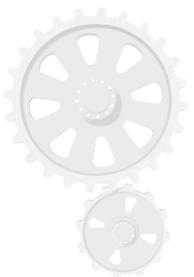
**Engrenagens que se acoplam necessitam ter o mesmo ângulo de pressão e o mesmo módulo**



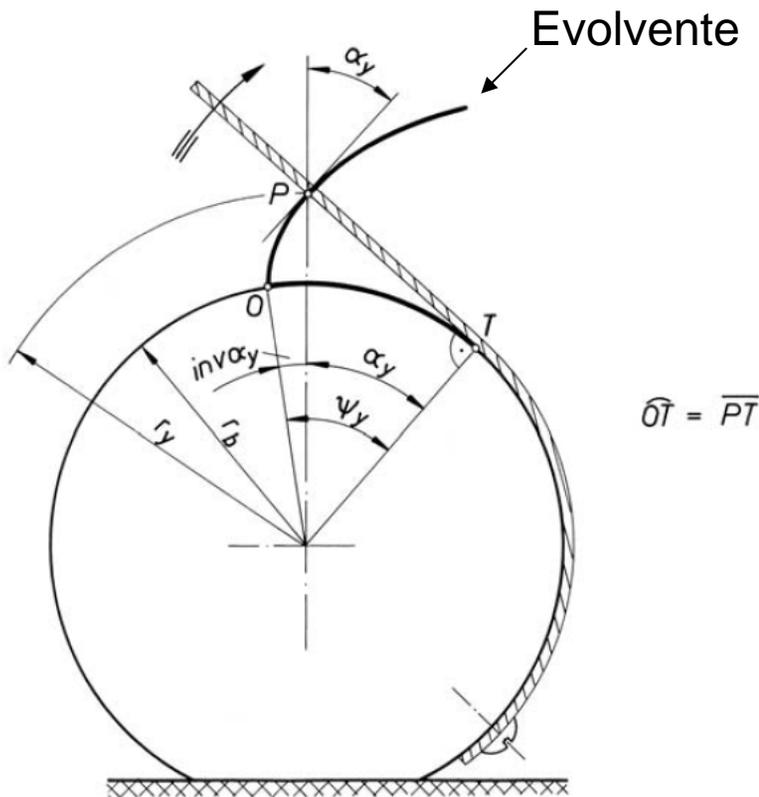


# Consideração dos perfis dos dentes

- Para cada posição de um par de dentes deve haver apenas um ponto de contato;
- A força normal comum aos dois perfís deve passar pelo ponto primitivo.

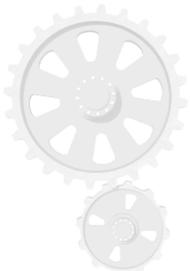
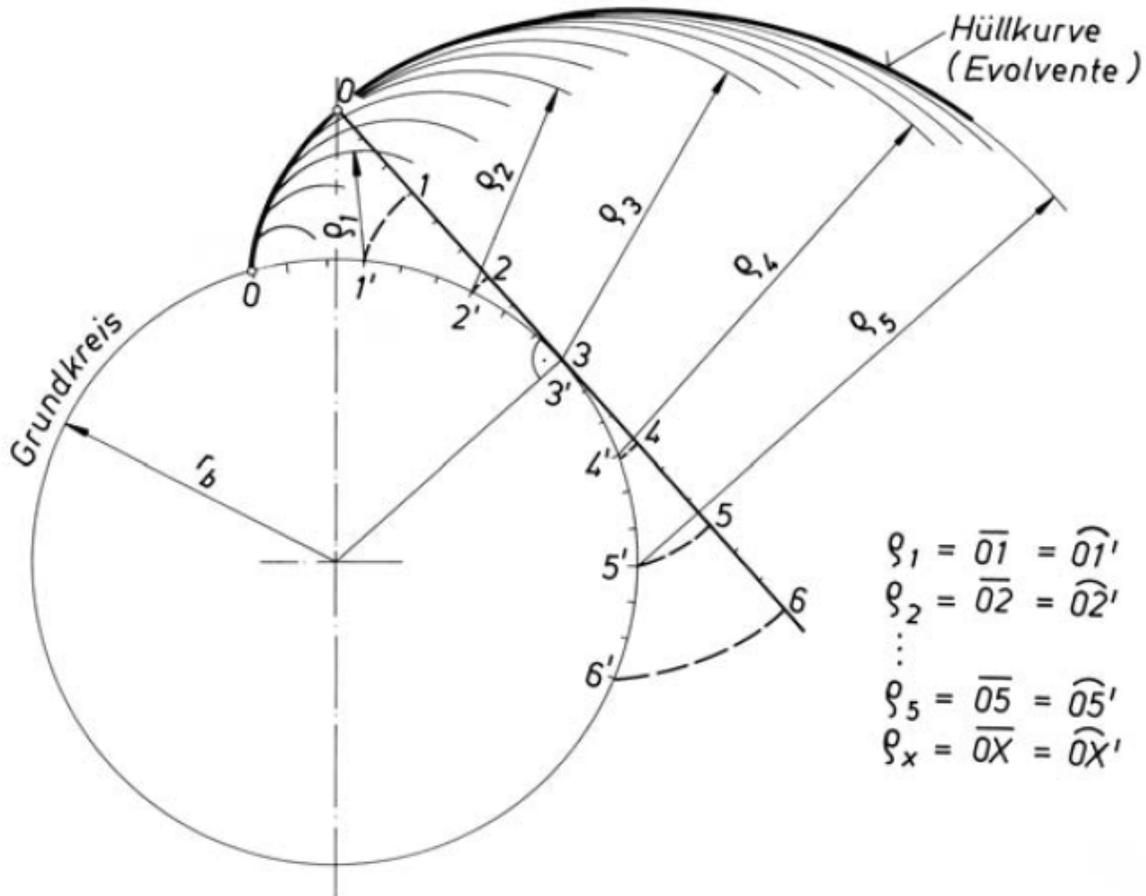


# Perfil evolvente



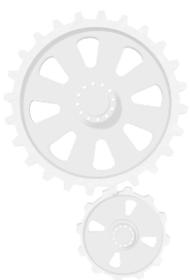
- Propriedades da Evolvente:
  - A forma da curva depende somente do raio;
  - A normal traçada de qualquer um de seus pontos é tangencial a circunferência de base;
  - É sempre externa a circunferência de base.

# Perfil evolvente

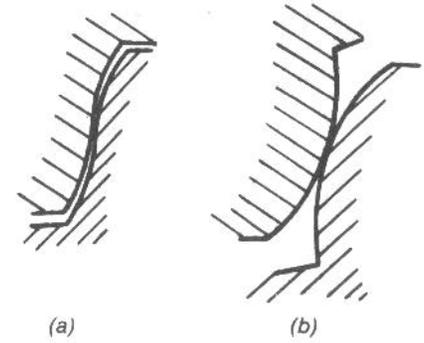
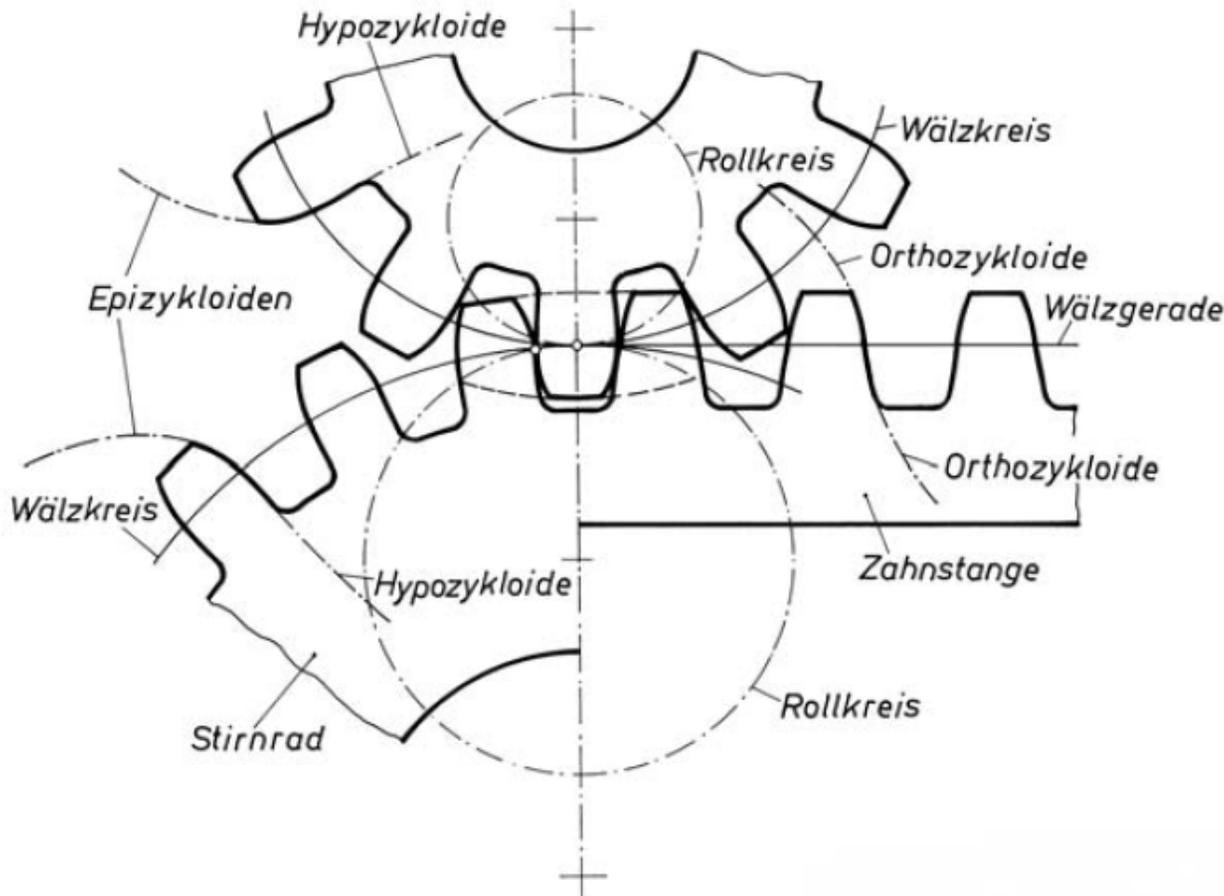


# Vantagens e desvantagens perfil evolvente

- Vantagens
  - Admite pequenas folgas entre eixos.
    - Variação do ângulo de pressão
  - Traçado mais simples;
  - Linha de ação é uma reta;
  - Pressões nos dentes constantes.
- Desvantagens
  - Contato entre linhas convexas;
    - Alta pressão.
  - $Z_{\text{mín}}$  maior;
  - Rendimento ligeiramente inferior.

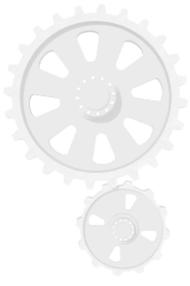


# Perfil cicloidal



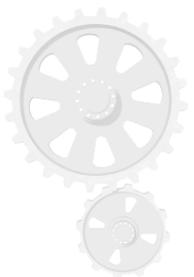
# Vantagens e desvantagens perfil cicloidal

- Vantagens
  - Área de contato conformada maior;
    - Pressão menor;
    - Menor desgaste;
    - $Z_{\min}$  admissível é menor.
- Desvantagens
  - Não permite folga alguma entre eixos;
  - Traçado mais difícil;
  - A pressão aumenta do centro para as extremidades;
  - Usinagem mais difícil.



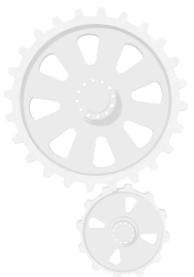
# Sistemas padronizados

- Usam  $m$  e  $P$  para padronizar as demais dimensões.
  - Normal
    - a cabeça do dente é igual ao módulo.
  - Composto  $14^{\circ}30'$ ;
    - mistura os perfis evolvente no meio do dente e cicloidalis na base e na ponta.
  - Stub  $20^{\circ}$  ;
    - cabeça do dente menor que  $m$ .
  - Fellow.
    - Utiliza  $P$  como numerador para o diametro e denominador para a altura dos dentes.

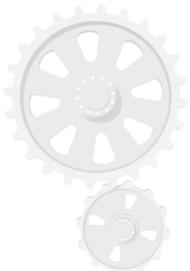
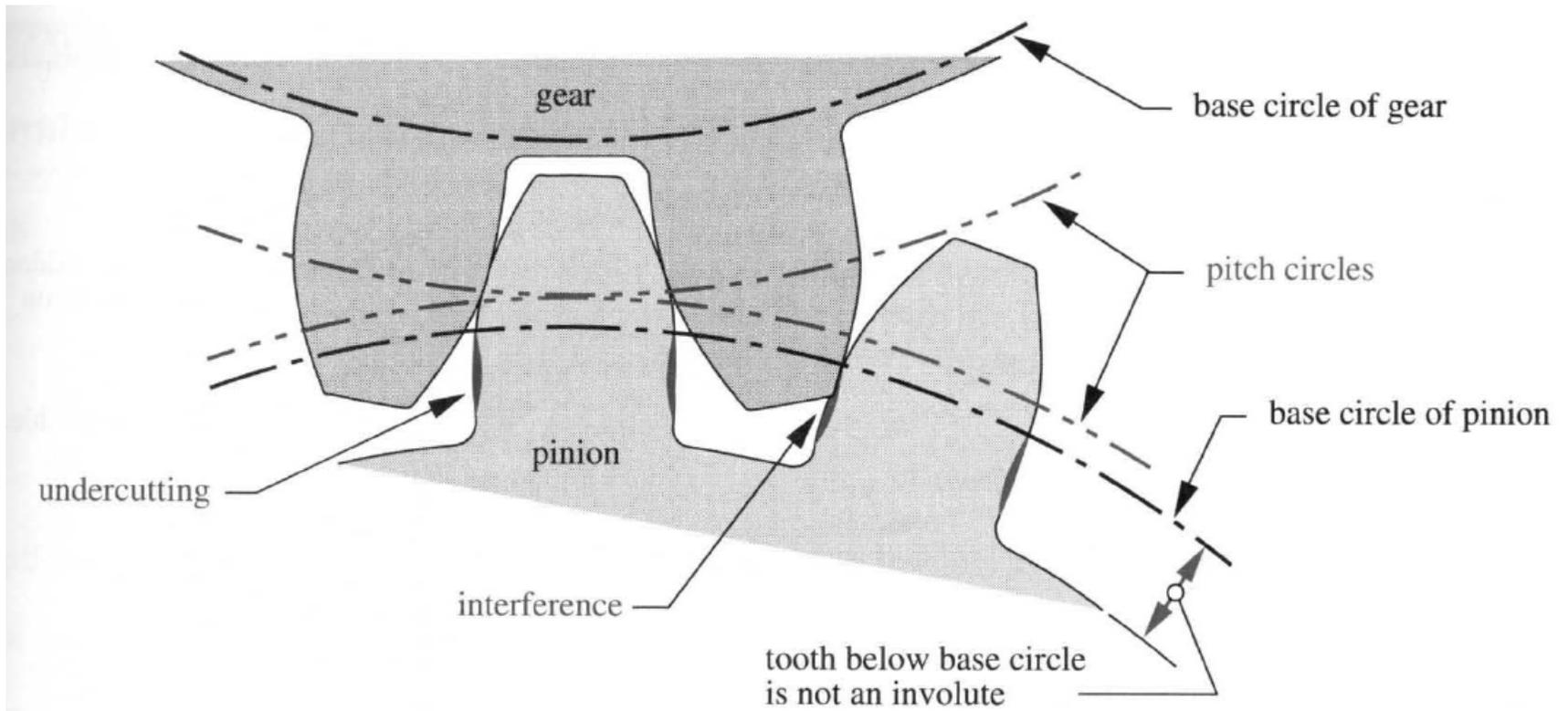


# Interferência

- Contato entre dentes em mais de um ponto de contato;
- Esforços excessivos na cabeça e na base dos dentes;
- Geram mal funcionamento da transmissão;
- Pode gerada por relações de engrenamento muito altas (acima de 6:1) e ou numero muito pequeno de dentes do pinhão.

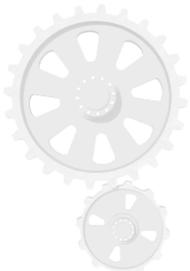
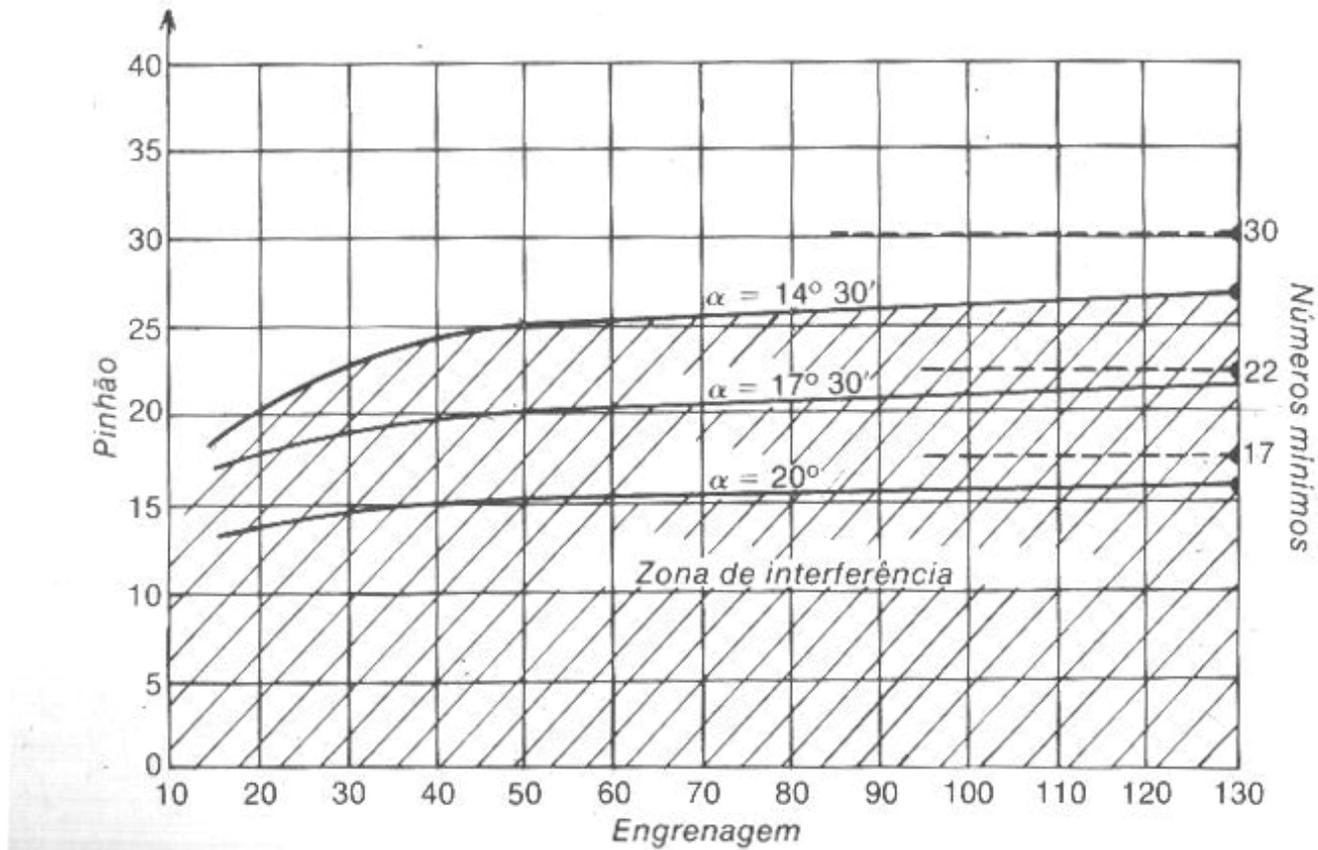


# Interferência



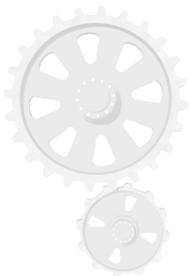
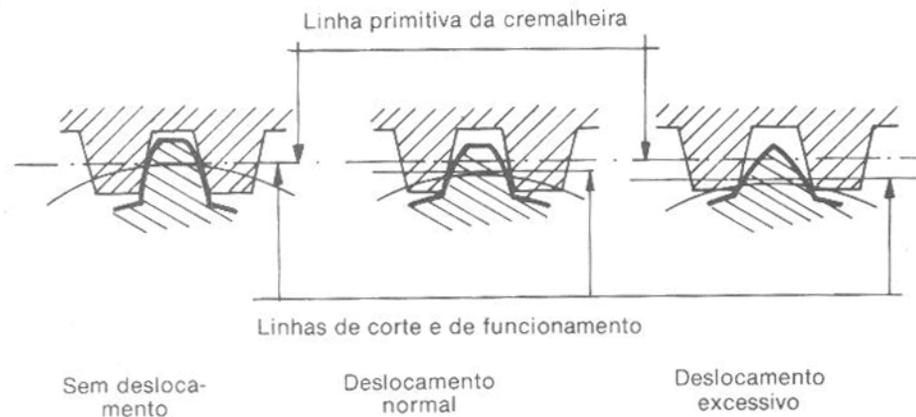
# Número mínimo de dentes

Relação do número mínimo de dentes, o angulo de ação, e a interferência.



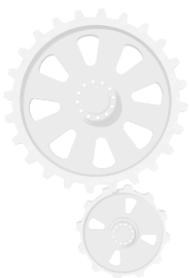
# Perfis deslocados ou corrigidos

- Usados quando a utilização de perfis normais produz interferência;
  - Ex. A distancia entre eixos n pode ser alterada
    - Melhora a relação de contato;
    - Possibilidade de produção de dentes mais largos;
    - Engrenagens não são intercambiáveis;
    - O ângulo de ação é modificado;
    - Utilizam normalmente o método do deslocamento do circulo primitivo.



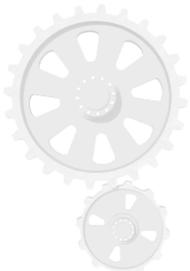
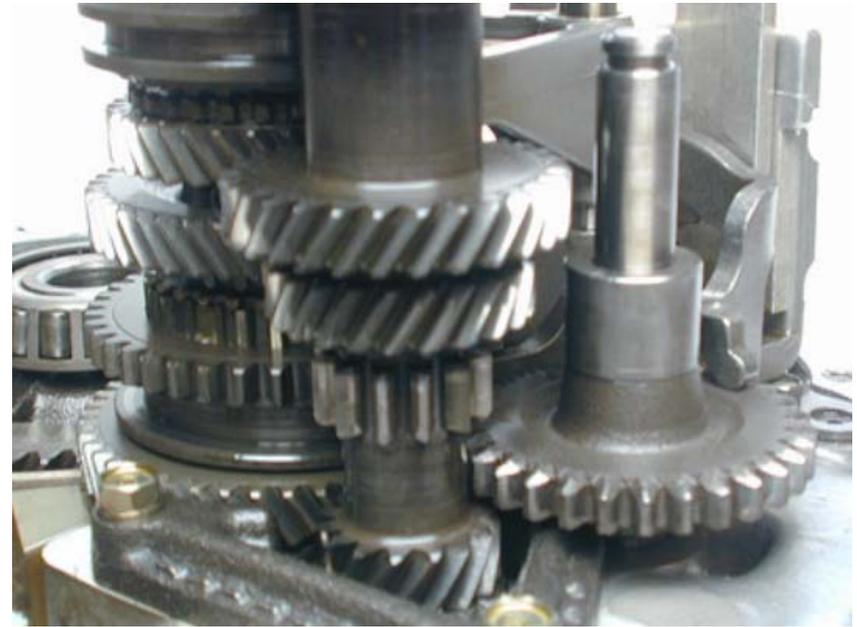
# Tipos de perfis deslocados

- Engrenamento V.
  - As engrenagens são contruídas com ângulo de ação menor, o que acarreta em um deslocamento da circunferência primitiva.
- Engrenamento VO.
  - São executados de tal forma que o pinhão tem um deslocamento positivo da circunferência primitiva e a coroa um deslocamento negativo desta.
    - Não há variação da distância entre eixos.



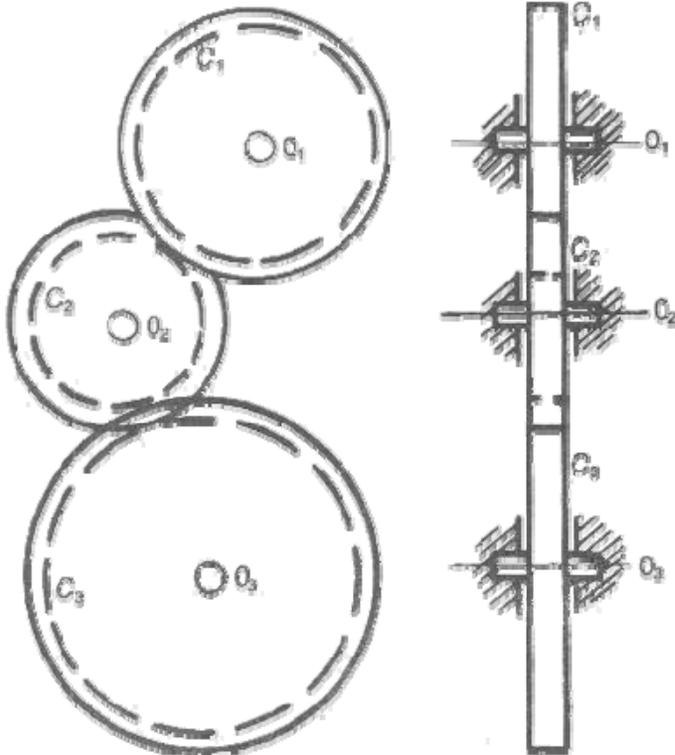
# Trens de engrenagens

- Trens de engrenagens são utilizados para obter altas relações de transmissão com engrenagens de tamanho moderado.



# Trens de engrenagens

- Trem simples



$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{d_2}{d_1} \quad \frac{w_2}{w_3} = \frac{d_3}{d_2}$$

Multiplicando-se cada termo da igualdade temos:

$$\frac{w_1 w_2}{w_2 w_3} = \frac{d_2 d_3}{d_1 d_2}$$



$$\frac{w_1}{w_3} = \frac{d_3}{d_1}$$

# Trens de engrenagens

- Trem composto

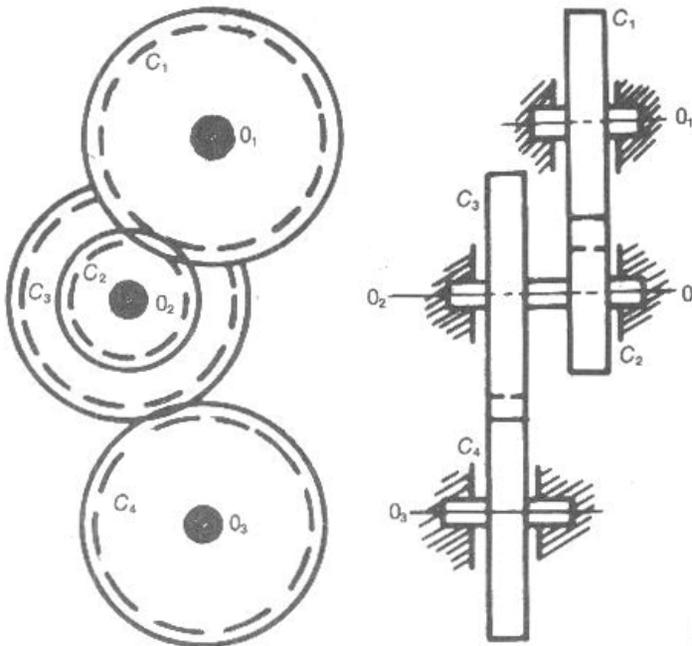
$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{d_2}{d_1} \quad \frac{w_3}{w_4} = \frac{d_4}{d_3}$$

Multiplicando-se cada termo da igualdade temos:

$$\frac{w_1 w_3}{w_2 w_4} = \frac{d_2 d_4}{d_1 d_3}$$

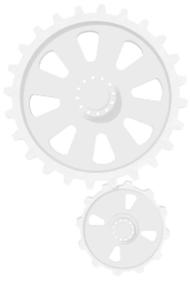
Como  $w_2 = w_3$ , temos:

$$\frac{w_1}{w_4} = \frac{d_2 d_4}{d_1 d_3}$$



# Calculo do n° de dentes (z)

- Características de z:
  - N° de dentes mínimo:
    - Para evitar interferência;
    - Diminuir tensões.
  - O rendimento aumenta com z;
  - É conveniente usar relações de transmissão não inteiras;
    - Evitando contato entre os mesmos dentes.
  - É conveniente determinar-se primeiro z e depois os diâmetros.



# Método geral derminação de z

- Dada uma relação de engrenamento de 400 rpm (motor) para 40 rpm (eixo de saída).  $\alpha=20^\circ$  e  $m=2$ .

$$R = \frac{400}{40} = \frac{10}{1}$$

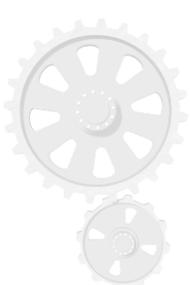
Que é maior que 6:1, logo:

$$\frac{10}{1} = \frac{2}{1} \times \frac{5}{1}$$

Sendo 5:1 proximo de 6:1 podemos reduzir esta relação novamente a:

$$\frac{10}{1} = \frac{2}{1} \times \frac{2}{1} \times \frac{2,5}{1}$$

Estando as relações em orden devemos observar qual é o  $z_{\text{mín}}$  para um ângulo de  $20^\circ$ ,



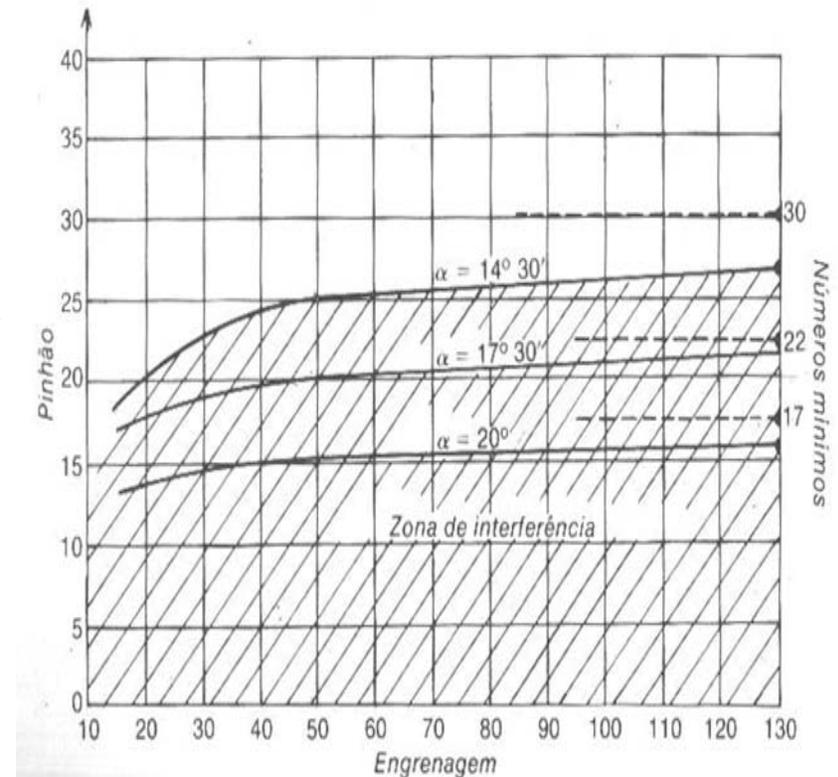
# Método geral derminação de z

Tipo de transmissao	Z mín	
	$\alpha=20^\circ$	$\alpha=14^\circ 30'$
Pequenas velocidades e pequendas cargas	10	18
Velocidades médias (6 – 9 m/s)	12	24
Cargas e velocidades elevadas(>15m/s)	16	30
Engrenamento externo	$z1+z2 \geq 24$	
Engrenamento interno	$z2-z1 \geq 10$	

Assim podemos escolher um número mínimo de dentes para cada pinhão,

$$\frac{32}{16} \times \frac{32}{16} \times \frac{40}{16}$$

Que devem ser verificados no grafico da interferencia.



# Solução final

Deste modo a solução final será:

onde:

$$z_1 = 16, d_1 = z \cdot m = 16 \cdot 2 = 32 \text{ mm}$$

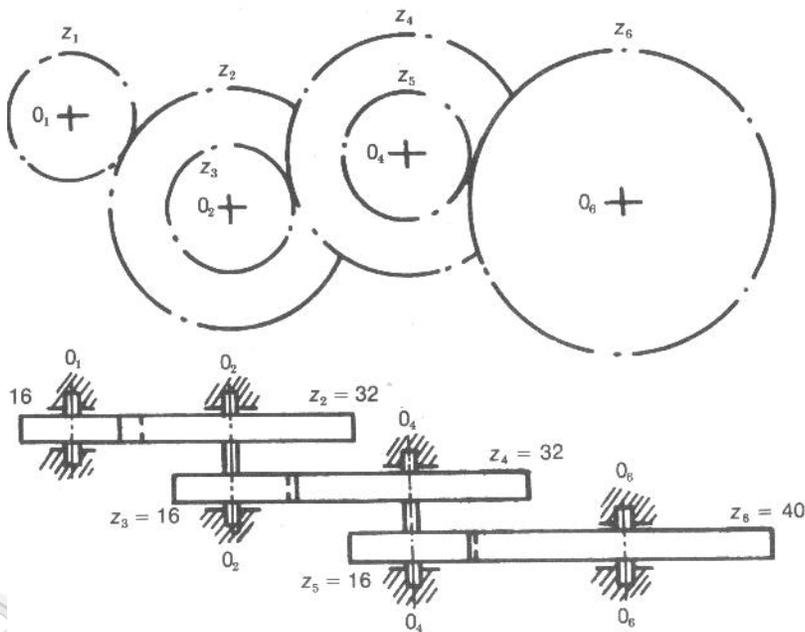
$$z_2 = 32, d_2 = z \cdot m = 32 \cdot 2 = 64 \text{ mm}$$

$$z_3 = 16, d_3 = z \cdot m = 16 \cdot 2 = 32 \text{ mm}$$

$$z_4 = 32, d_4 = z \cdot m = 32 \cdot 2 = 64 \text{ mm}$$

$$z_5 = 16, d_5 = z \cdot m = 16 \cdot 2 = 32 \text{ mm}$$

$$z_6 = 40, d_6 = z \cdot m = 40 \cdot 2 = 80 \text{ mm}$$



# Relação de transmissão de binários

Sendo  $W_1$  e  $W_2$  as Potências nas engrenagens 1 (motora) e 2 (movida), e sendo  $\eta$  o rendimento do Par, temos:

$$W_2 = \eta W_1, \quad \text{como } W = M \cdot w, \text{ temos:}$$

$M_2 w_2 = \eta M_1 w_1$  deste modo temos:

$$M = \frac{W}{w} = 9,55 \frac{W}{n} = 716 \frac{W_{CV}}{n}$$

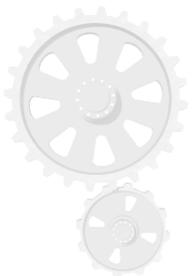
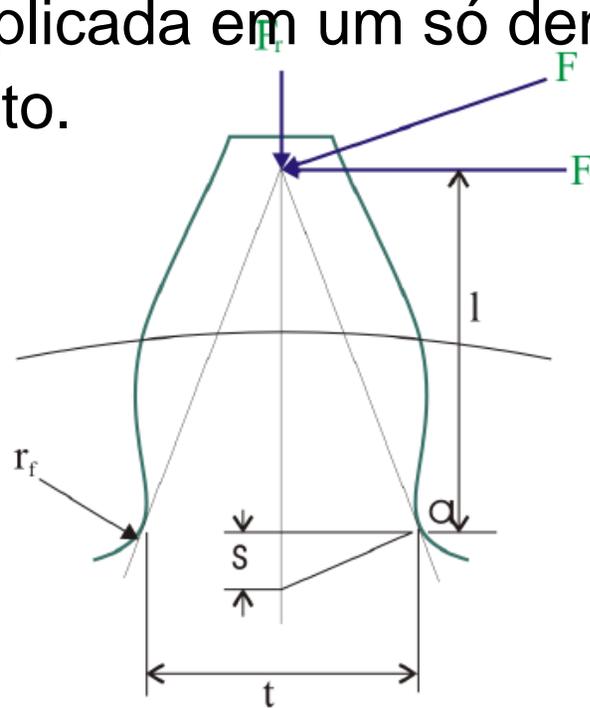
$$M = m \cdot \text{Kg}, \quad W = \text{Kgm/s}, \quad n = \text{rpm}, \quad W_{CV} = \text{CV}$$

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{w_2}{\eta w_1} = \frac{z_1}{\eta z_2} = \frac{d_1}{\eta d_2}$$



# Carregamento

- Pode ser simplificado:
  - As pressões estão uniformemente distribuídas em toda a largura do dente;
  - Toda força é aplicada em um só dente;
  - Não ocorre atrito.



# Transmissão de potência

$$P = \frac{T n}{63,000}$$

- $n$ , shaft speed (rpm)
- $T$ , torque (in lbs)
- $P$ , power (hp)

$$P = \frac{F v}{33,000}$$

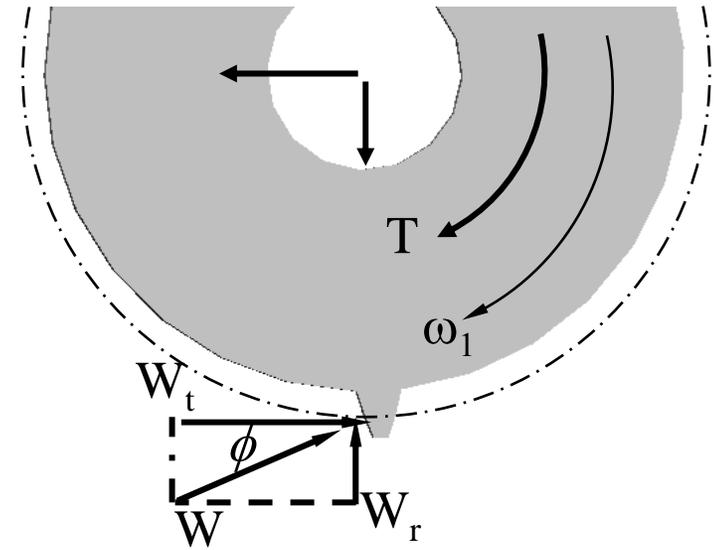
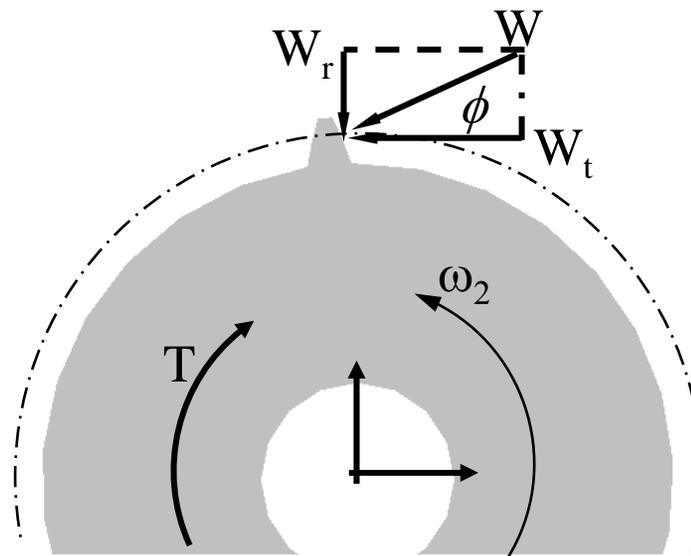
- $v$ , velocity (ft/min)
- $F$ , force (lbs)
- $P$ , power (hp)



# Forças na Engrenagem

- Força normal ( $W$ ) age sobre a linha de pressão ( $\phi$ )

## Engrenagem



## Pinhão



# Forças na Engrenagem

- Torque transmitido:

$$P = W_t \left( \frac{d}{2} \right) = \frac{T n}{63,000}$$

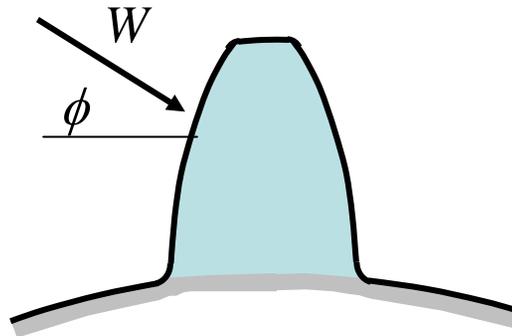
- sendo:  $v_t = \frac{\pi d n}{12}$  então:  $W_t = \frac{33,000 P}{v_t}$

- Logo:  $W = W_t \tan \phi$  &  $W_r = \frac{W_t}{\cos \phi}$

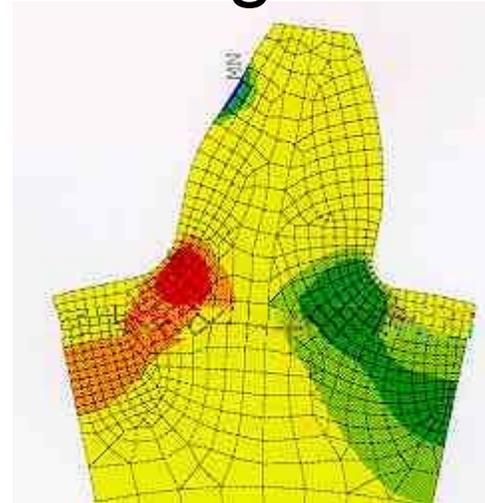


# Tensões nos dentes da Engrenagem

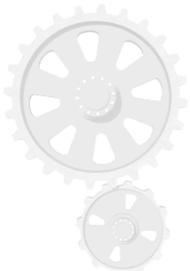
- Analisado como uma barra engastada



$$\sigma = -\frac{F}{A} \pm \frac{Mc}{I}$$



- Existem tensões de flexão e de contato



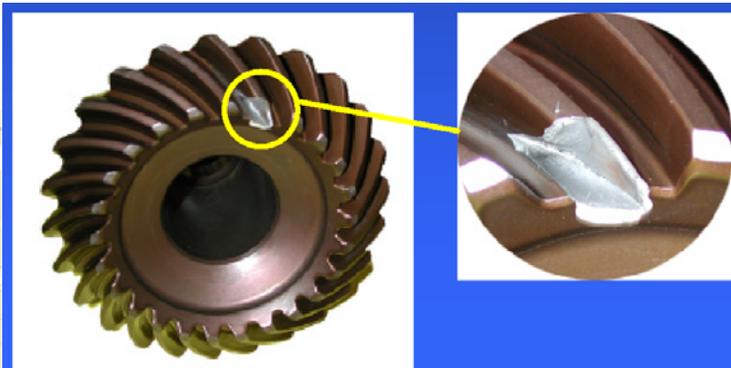
# Bending Stress

- Tensão de flexão

$$\sigma_t = \frac{W_t P_d}{F J} \left( \frac{K_a K_s K_m K_B}{K_v} \right)$$

- Limite de segurança

$$\sigma_{t_{allow}} = \left( \frac{K_L}{K_R} \right) S_{at}$$



- J, fator de geometria
- $K_a$ , fator de Aplicação
- $K_v$ , fator dinâmico
- $K_s$ , fator de tamanho
- $K_m$ , fator de distribuição de carga
- $K_B$ , fator de espessura do dente
- $K_L$ , fator de expectativa de vida
- $K_R$ , fator de confiança

# Contact Stress



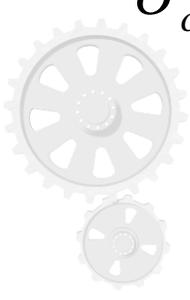
- Tensão de contato

$$\sigma_c = C_p \sqrt{\frac{C_a C_s C_m W_t}{C_v F D_p I}}$$

- Limite de segurança

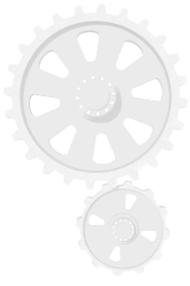
$$\sigma_{c_{allow}} = \left( \frac{K_L}{K_R} \right) S_{ac}$$

- I, fator de geometria
- $C_p$ , factor de elasticidade
- $C_a$ , fator de aplicação ( $K_a$ )
- $C_v$ , fator dinâmico ( $K_v$ )
- $C_s$ , fator de tamanho ( $K_s$ )
- $C_m$ , distribuição de carga ( $K_m$ )
- $C_L$ , expectativa de vida ( $K_L$ )
- $C_R$ , fator de segurança ( $K_R$ )



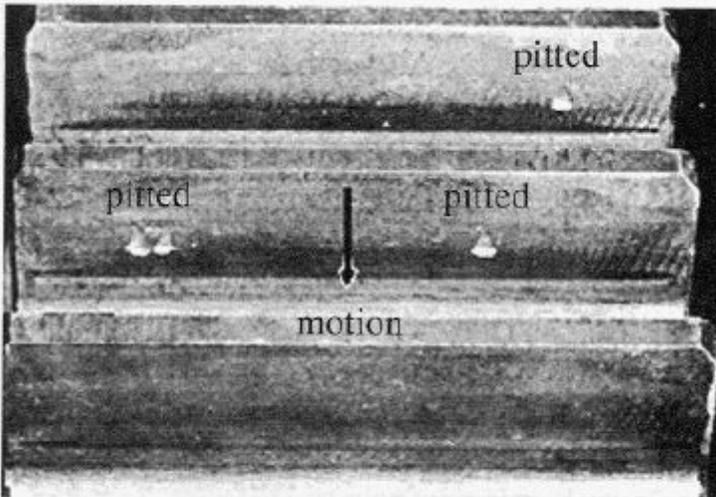
# Projeto de Engrenagens

- Proponha uma geometria baseada na cinemática
- Selecione um material e um módulo.
- Determine tensões de contato e de flexão.
- Otimize o material e ou proponha um tratamento térmico.
- Refaça os cálculos (se necessário)

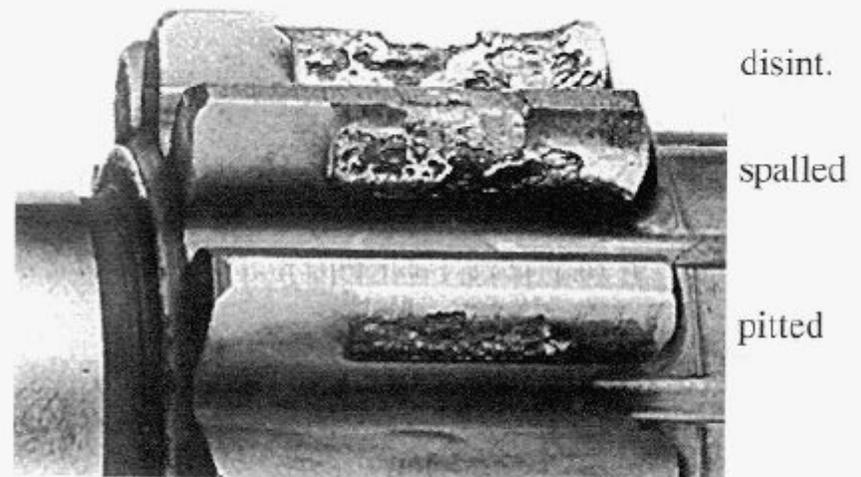


# Tipos de falhas dos dentes

- Ruptura:
  - Força estática;
  - Fadiga.



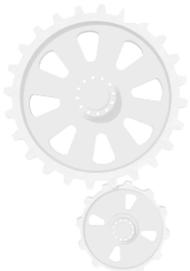
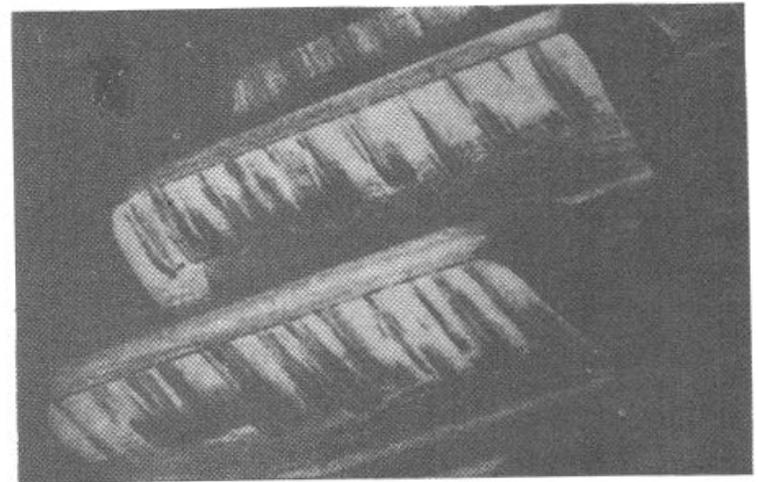
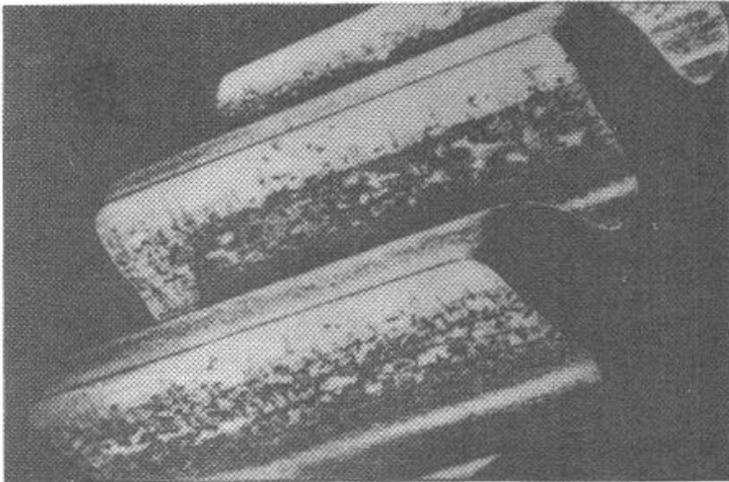
(a) Mild pitting on gear teeth



(b) Severe pitting, spalling, and disintegration of gear teeth

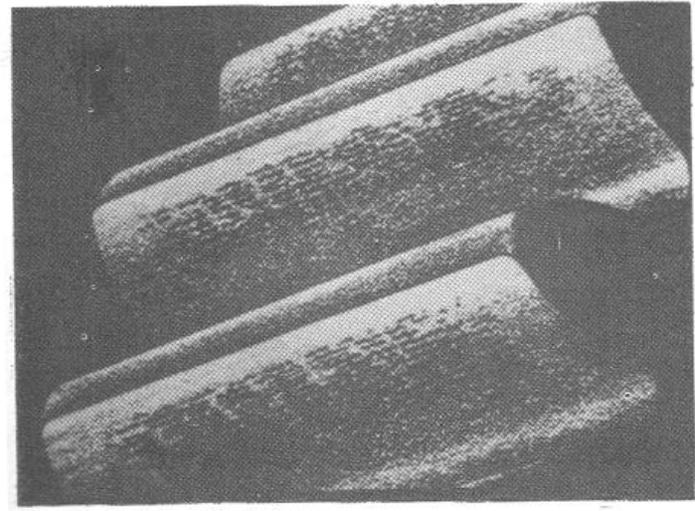
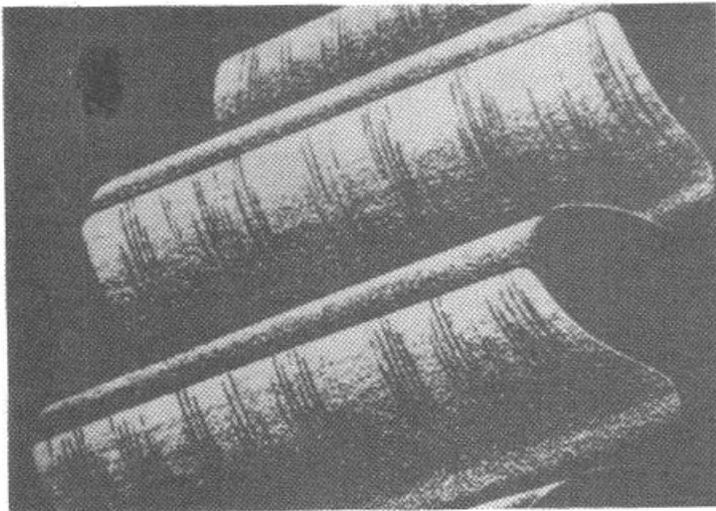
# Tipos de falhas dos dentes

- Desgaste por atritamento
- Desgaste por abrasão



# Tipos de falhas dos dentes

- Desgaste por arranhamento
- Desgaste por transporte

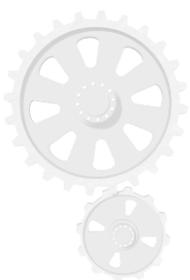


# Exemplo

Um pinhão com um diametral pitch = 6 com angulo de ação =  $20^{\circ}$  e com 16 dentes e movido por um motor elétrico de 5HP. Ele move uma engrenagem de 36 dentes acoplada em um misturador de cimento. O misturador gira a uma rotação de 400 rpm. O Par de engrenagens tem uma espessura de 1,25 polegadas na face e uma qualidade AGMA de 8.

O pinhão e feito de aço AISI 4140 OQT 1000 e a engrenagem e feita de um aço AISI 4140, recozido.

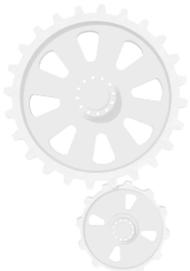
Avalie o par de engrenagens baseado nas tensões de contato e de flexão.



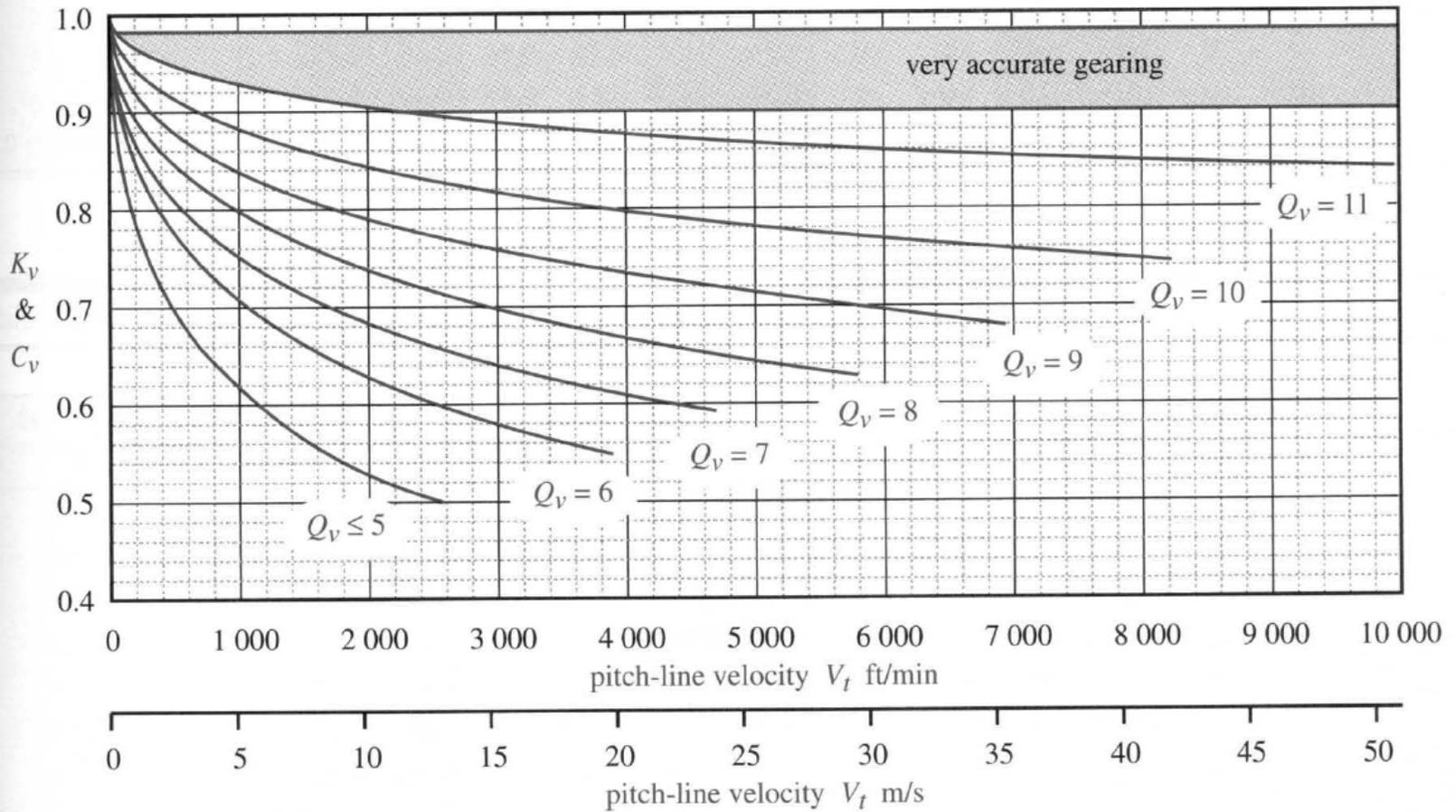
# Tensão de flexão

$$\sigma_b = \frac{W_t P_d}{FJ} \frac{K_a K_m}{K_v} K_s K_B K_I$$

$$\sigma_b = \frac{W_t}{FmJ} \frac{K_a K_m}{K_v} K_s K_B K_I$$



# $K_v$



# Q<sub>v</sub>

Recommended AGMA  
Gear Quality Numbers  
for Various Applications

Application	Q <sub>v</sub>
Cement mixer drum drive	3–5
Cement kiln	5–6
Steel mill drives	5–6
Corn picker	5–7
Cranes	5–7
Punch press	5–7
Mining conveyor	5–7
Paper-box making machine	6–8
Gas meter mechanism	7–9
Small power drill	7–9
Clothes washing machine	8–10
Printing press	9–11
Computing mechanism	10–11
Automotive transmission	10–11
Radar antenna drive	10–12
Marine propulsion drive	10–12
Aircraft engine drive	10–13
Gyroscope	12–14

Recommended Gear  
Quality Numbers versus  
Pitch Line Velocity

Pitch Velocity	Q <sub>v</sub>
0–800 fpm	6–8
800–2000 fpm	8–10
2000–4000 fpm	10–12
Over 4000 fpm	12–14



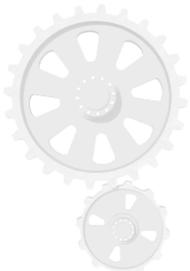
# J

**Table 11-8 AGMA Bending Geometry Factor J for 20°, Full-Depth Teeth with Tip Loading**

Gear teeth	Pinion teeth																
	12		14		17		21		26		35		55		135		
	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	
12	U	U															
14	U	U	U	U													
17	U	U	U	U	U	U											
21	U	U	U	U	U	U	0.24	0.24									
26	U	U	U	U	U	U	0.24	0.25	0.25	0.25							
35	U	U	U	U	U	U	0.24	0.26	0.25	0.26	0.26	0.26					
55	U	U	U	U	U	U	0.24	0.28	0.25	0.28	0.26	0.28	0.28	0.28			
135	U	U	U	U	U	U	0.24	0.29	0.25	0.29	0.26	0.29	0.28	0.29	0.29	0.29	

**Table 11-9 AGMA Bending Geometry Factor J for 20°, Full-Depth Teeth with HPSTC Loading**

Gear teeth	Pinion teeth																
	12		14		17		21		26		35		55		135		
	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	P	G	
12	U	U															
14	U	U	U	U													
17	U	U	U	U	U	U											
21	U	U	U	U	U	U	0.33	0.33									
26	U	U	U	U	U	U	0.33	0.35	0.35	0.35							
35	U	U	U	U	U	U	0.34	0.37	0.36	0.38	0.39	0.39					
55	U	U	U	U	U	U	0.34	0.40	0.37	0.41	0.40	0.42	0.43	0.43			
135	U	U	U	U	U	U	0.35	0.43	0.38	0.44	0.41	0.45	0.45	0.47	0.49	0.49	



# $K_m$

**Table 11-16**  
Load Distribution Factors  $K_m$

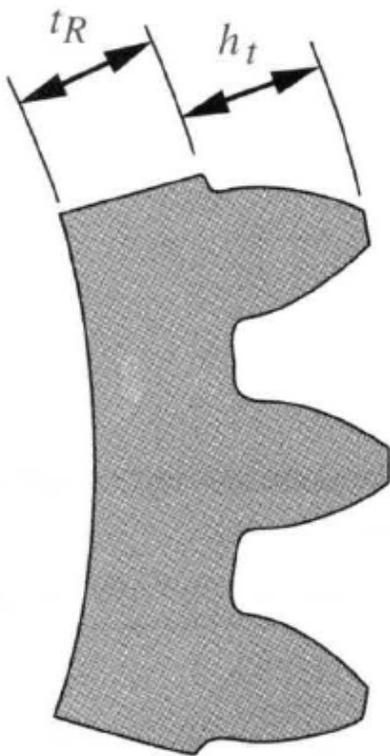
Face Width in (mm)	$K_m$
<2 (50)	1.6
6 (150)	1.7
9 (250)	1.8
$\geq 20$ (500)	2.0



# K<sub>a</sub>

Table 11-17 Application Factors  $K_a$

Driving Machine	Driven Machine		
	Uniform	Moderate Shock	Heavy Shock
Uniform (Electric motor, turbine)	1.00	1.25	1.75 or higher
Light Shock (Multicylinder engine)	1.25	1.50	2.00 or higher
Medium Shock (Single-cylinder engine)	1.50	1.75	2.25 or higher



$$m_B = \frac{t_R}{h_t}$$

$$K_B = -2m_B + 3.4$$

$$0.5 \leq m_B \leq 1.2$$

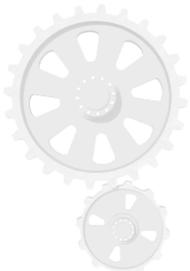
$$K_B = 1.0$$

$$m_B > 1.2$$



# Tensão de contato

$$\sigma_c = C_p \sqrt{\frac{W_t}{F l d} \frac{C_a C_m}{C_v} C_s C_f}$$



# Fator de superfície I

$$I = \frac{\cos \phi}{\left( \frac{1}{\rho_p} \pm \frac{1}{\rho_g} \right) d_p}$$

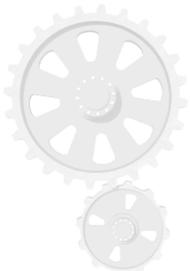
$$\rho_p = \sqrt{\left( r_p + \frac{1 + x_p}{P_d} \right)^2 - \left( r_p \cos \phi \right)^2} - \frac{\pi}{P_d} \cos \phi$$

$$\rho_g = C \sin \phi \mp \rho_p$$



# Coeficiente Elástico $C_p$

$$C_p = \sqrt{\frac{1}{\pi \left[ \left( \frac{1 - \nu_p^2}{E_p} \right) + \left( \frac{1 - \nu_g^2}{E_g} \right) \right]}}$$



# C<sub>p</sub>

**Table 11-18 AGMA Elastic Coefficient C<sub>p</sub> in Units of [psi]<sup>0.5</sup> ( [MPa]<sup>0.5</sup> )<sup>\*†</sup>**

Pinion Material	E <sub>p</sub> psi (MPa)	Gear Material					
		Steel	Malleable Iron	Nodular Iron	Cast Iron	Aluminum Bronze	Tin Bronze
<b>Steel</b>	30E6 (2E5)	2 300 (191)	2 180 (181)	2 160 (179)	2 100 (174)	1 950 (162)	1 900 (158)
<b>Malleable Iron</b>	25E6 (1.7E5)	2 180 (181)	2 090 (174)	2 070 (172)	2 020 (168)	1 900 (158)	1 850 (154)
<b>Nodular Iron</b>	24E6 (1.7E5)	2 160 (179)	2 070 (172)	2 050 (170)	2 000 (166)	1 880 (156)	1 830 (152)
<b>Cast Iron</b>	22E6 (1.5E5)	2 100 (174)	2 020 (168)	2 000 (166)	1 960 (163)	1 850 (154)	1 800 (149)
<b>Aluminum Bronze</b>	17.5E6 (1.2E5)	1 950 (162)	1 900 (158)	1 880 (156)	1 850 (154)	1 750 (145)	1 700 (141)
<b>Tin Bronze</b>	16E6 (1.1E5)	1 900 (158)	1 850 (154)	1 830 (152)	1 800 (149)	1 700 (141)	1 650 (137)

